Analiza matematyczna
Lista 3 (całki oznaczone i ich zastosowania)

Zad 1. Korzystając z zadaniczego twierdzenia analizy obliczyć podane całki oznaczone

a) $\int_1^2 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$, b) $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\, dx$, c) $\int_0^9 \frac{dx}{x^2+9}$, d) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2-1}$,

e) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln x\, dx$, f) $\int_{\pi}^{2\pi} (\sin x + \cos^2 x)\, dx$, g) $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}\, dx$,

h) $\int_1^3 \frac{x\, dx}{\sqrt{x+1}}$, i) $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x\, dx$, j) $\int_0^{\pi} x(1+\cos x)\, dx$, k) $\int_0^1 \frac{x^3\, dx}{x^8+1}$.

Zad 2. Obliczyć podane całki oznaczone

a) $\int_{e^{-1}}^{2} (x-1)\,\mathrm{sgn}(\ln x)\, dx$, b) $\int_0^3 f(x)\, dx$, gdzie $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{dla } 0 \le x \le 1 \\ 1, & \text{dla } 1 < x < 2, \\ (2-x)^2 & \text{dla } 2 < x \le 3 \end{cases}$

c) $\int_{-2}^{2} ||x|-1|\, dx$, d) $\int_0^4 \frac{|x-1|\, dx}{|x-2|+|x-3|}$, e) $\int_{-2}^{2} \mathrm{sgn}(x-x^2)\, dx$, f) $\int_1^3 x\lfloor x \rfloor\, dx$,

g) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \lfloor \ln x \rfloor\, dx$, h) $\int_0^2 \sqrt{x^4-4x^2+4}\, dx$, i) $\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin x + \frac{1}{2}\right|\, dx$, j) $\int_2^{\pi} e^{\lfloor x \rfloor}\, dx$.

Zad 3. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach

a) $y^2 = x$, $x = 8$, b) $y = x^2$, $y^2 = x^2$, c) $y = x^2 - x - 6$, $y = -x^2 + 5x + 14$,

d) $y = 2x^3$, $y^2 = 4x$, e) $y = x^3$, $y = 4x$, f) $y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 - 4x = 0$,

g) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 3x$, h) $(x-6)^2 + y^2 = 36$, $y^2 = 6x$, i) $y = x^3$, $y = x^5$.

Zad 4. Korzystając ze wzoru $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ obliczyć długości następujących łuków

a) $y = \frac{4}{3}x$, $0 \le x \le 3$, b) $x^2 + y^2 = 1$, c) $y = x^2$, $0 \le x \le 2$,

d) $y^2 = 4x^3$, $0 \le x \le \frac{8}{9}$, e) $9y^2 = x^3$, $0 \le x \le 12$, f) $y = 2\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$.

Zad 5. Korzystając ze wzorów $V = \pi \displaystyle\int_a^b y^2\, dx$ oraz $S = 2\pi \displaystyle\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ obliczyć objętość oraz pole powierzchni bryły ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót dookoła osi Ox krzywej

a) $x^2 + y^2 - 10x + 75 = 0$, b) $4x^2 + 9y^2 = 36$, c) $x^2 + y^2 - 20y + 75 = 0$,

d) $y^2 = 4x$, oraz płaszczyzną $x = 3$, e) $3y - x^3 = 0$, oraz płaszczyznami $x = 0$, $x = 1$

f) $x^2 - y^2 = a^2$, $a > 0$, $a \le x \le a\sqrt{2}$ oraz płaszczyzną $x = a\sqrt{2}$,

Zad 6. Korzystając z definicji całki oznaczonej uzasadnić obliczyć granice

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}$, b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+n}+\sqrt{2+n}+\ldots+\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}}$, c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{(1+n)(2+n)\ldots(n+n)}{n^n}$.

Literatura:

- M. Gewert, Z. Skoczylas „*Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania*” Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2008; rozdział 8
- W.Krysicki, L. Włodarski „*Analiza matematyczna w zadaniach. Część I*” PWN, Warszawa 1998; rozdziały XIX, XX
- J. Banaś, S. Wędrychowicz „*Zbiór zadań z analizy matematycznej*” WNT, Warszawa 1997, rozdział XIV